第 9 章　曲线积分与曲面积分

（本章数二不作要求）

与重积分类似，曲线积分和曲面积分是定义在曲线段和有界曲面上的按特定方式得到的和式的极限. 当极限存在时，它们是确定的数.

基础知识与规律总结

9.1　曲线积分

曲线积分按积分域是无向曲线段还是有向曲线段而划分为第一类曲线积分（即对弧长的曲线积分）和第二类曲线积分（即对坐标的曲线积分）.

一、对弧长的曲线积分

1. 定义

设 L 为 xOy 平面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界.

与定积分类似，用 $n-1$ 个点将 L 分为 n 个小弧段，设 λ 为 n 个小弧段长度的最大值，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta s_i$$

存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s,$$

即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\cdot \Delta s_i,$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数，L 叫做积分弧段.

注 ① 如果函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续，则对弧长的曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 一定存在.

② 上述定义可以推广到积分弧段为空间曲线弧 Γ 的情形，即函数 $f(x,y,z)$ 在曲线 Γ 上对弧长的曲线积分

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot \Delta s_i.$$

2. 物理意义

$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 或 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 表示线密度为 $\mu = f(x,y)$ 或 $\mu = f(x,y,z)$ 的曲线 L 的质量 M，即

$$M = \int_L f(x,y)\mathrm{d}s \text{ 或 } M = \int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s.$$

3. 对弧长的曲线积分的性质

性质 1 （线性性质） 设 α,β 是常数，则

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(x,y)\mathrm{d}s+\beta\int_L f(x,y)\mathrm{d}s.$$

性质 2 （对积分路径具有可加性） 如果曲线 L 分段光滑，即 $L=L_1+L_2$，L_1,L_2 光滑，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L_1} f(x,y)\mathrm{d}s+\int_{L_2} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

性质 3 如果在 L 上，函数 $f(x,y)\equiv 1$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_L 1\mathrm{d}s=S(S\text{ 是曲线 }L\text{ 的长度}).$$

性质 4 如果在 L 上 $f(x,y)\leqslant g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\leqslant\int_L g(x,y)\mathrm{d}s.$$

特别地，有

$$\left|\int_L f(x,y)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_L |f(x,y)|\mathrm{d}s.$$

性质 5 （与路径方向无关）

$$\int_{L(AB)} f(x,y)\mathrm{d}s=\int_{L(BA)} f(x,y)\mathrm{d}s.$$

4. 对弧长的曲线积分的计算

定理 设 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta),$$

其中 $\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上具有一阶连续导数，且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$，则曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$ 存在，

且
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

注 ① 上式中的定积分的下限为小参数，上限为大参数，即定积分的下限 α 一定要小于上限 β.

② 如果曲线 L 由方程 $y=f(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f[x,f(x)]\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

③ 如果曲线 L 由方程 $x=g(y)(c\leqslant y\leqslant d)$ 给出，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_c^d f[g(y),y]\sqrt{1+[g'(y)]^2}\,\mathrm{d}y.$$

④ 空间曲线积分 $\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 的计算类似，即若空间曲线弧 Γ 由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\\ z=\omega(t)\end{cases}$$

给出，则

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\omega'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

⑤ 计算曲线积分可将积分曲线的方程直接代入被积函数中去.

【例 9.1】 计算 $\int_L (x^2+y^2)^3\mathrm{d}s$，其中 L 为圆周 $x=a\cos t,y=a\sin t(0\leqslant t\leqslant 2\pi,a>0)$.

【解】由定理可得

$$\int_L (x^2+y^2)^3 \mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} a^6 \sqrt{a^2}\,\mathrm{d}t = 2a^7\pi.$$

【例 9.2】计算 $\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 从 $O(0,0)$ 到 $B(1,1)$ 之间的一段弧.

【解】由注 ② 可得

$$\int_L \sqrt{y}\,\mathrm{d}s = \int_0^1 \sqrt{x^2}\sqrt{1+(x^2)'^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1).$$

【例 9.3】计算 $I=\int_L (x+y)\mathrm{e}^{x^2+y^2}\mathrm{d}s$，其中 L 是圆弧 $y=\sqrt{a^2-x^2}$ 与 $y=x$，$y=-x$ 所围成的扇形区域的边界.

【解】草图如图 9-1 所示，

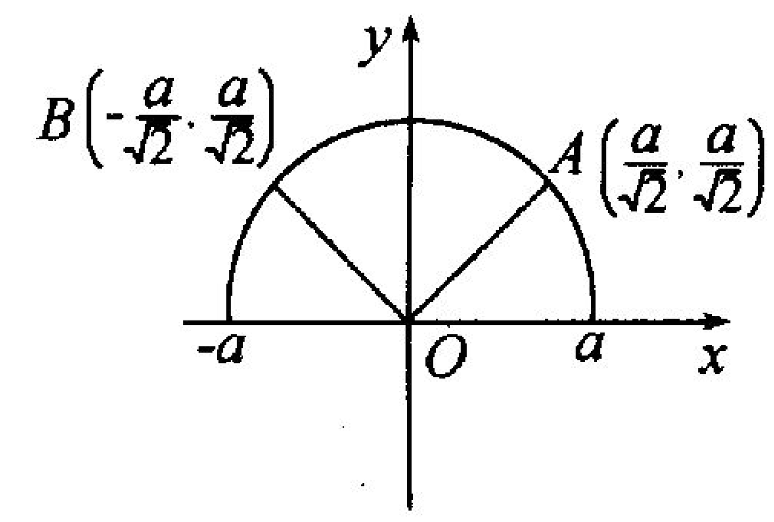

图 9-1

$$I=\int_{\overline{OA}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\overline{BO}}.$$

$\overline{OA}$：$y=x$，$0\leqslant x\leqslant \frac{a}{\sqrt{2}}$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$，

$$\int_{\overline{OA}} = \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} 2x\mathrm{e}^{2x^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{a^2}-1}{\sqrt{2}}.$$

$\widehat{AB}$：$\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=a\sin\theta \end{cases}$，$\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}$，$\mathrm{d}s=\sqrt{x'^2+y'^2}\,\mathrm{d}\theta=a\mathrm{d}\theta$，

于是 $$\int_{\widehat{AB}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} a(\cos\theta+\sin\theta)\mathrm{e}^{a^2}\cdot a\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}a^2\mathrm{e}^{a^2}.$$

$\overline{BO}$：$y=-x$，$-\frac{a}{\sqrt{2}}\leqslant x\leqslant 0$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}\,\mathrm{d}x$. $\int_{\overline{BO}} = \int_{-\frac{a}{\sqrt{2}}}^{0} 0\cdot \mathrm{e}^{2x^2}\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}x = 0.$

故 $I=\frac{\sqrt{2}}{2}[(1+2a^2)\mathrm{e}^{a^2}-1]$.

【例 9.4】计算曲线积分 $\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t$、$y=a\sin t$，$z=kt$ 上相应于 t 从 0 到 2π 的一段.

【解】$\int_\Gamma (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}[(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2]\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{a^2+k^2}\left[a^2t+\frac{k^2}{3}t^3\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2).$$

5. 利用曲线积分的对称性化简积分

(1) 轮换对称.

$x\leftrightarrow y$ 后 L 不变，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_L f(y,x)\mathrm{d}s$；

$\begin{matrix} x & \rightarrow & y \\ & \nwarrow \; \swarrow & \\ & z & \end{matrix}$ 后 Γ 不变，则 $\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} f(y,z,x)\mathrm{d}s = \int_{\Gamma} f(z,x,y)\mathrm{d}s$.

(2) 奇偶对称.

若 L 关于 y 轴对称，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为奇函数} \\ 2\int_{L(x\geqslant 0)} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,y) \text{ 关于 } x \text{ 为偶函数} \end{cases}$;

若 L 关于 x 轴对称，则 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \begin{cases} 0, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为奇函数} \\ 2\int_{L(y\geqslant 0)} f(x,y)\mathrm{d}s, & f(x,y) \text{ 关于 } y \text{ 为偶函数} \end{cases}$;

对积分 $\int_{\Gamma} f(x,y,z)\mathrm{d}s$ 有类似的性质.

【例 9.5】 计算 $\int_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s$，其中 $L: x^2+y^2=a^2$.

【解】 $\int_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s = \int_L x^2\mathrm{d}s + \int_L y^3\mathrm{d}s$.

由于 L 的“轮换对称性”，有 $\int_L x^2\mathrm{d}s = \int_L y^2\mathrm{d}s$.

又 L 关于 x 轴对称，且 $f(x,y)=y^3$ 关于 y 为奇函数，所以 $\int_L y^3\mathrm{d}s = 0$.

故 $\int_L (x^2+y^3)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s = \frac{a^2}{2}\int_L \mathrm{d}s = \frac{a^2}{2}\cdot 2\pi a = \pi a^3$.

6. 曲线积分的应用

设 μ 为线密度，L 为物体形状，则

质心坐标为 $\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{\int_L x\mathrm{d}s} \\ \bar{y} = \dfrac{\int_L y\mu\mathrm{d}s}{\int_L y\mathrm{d}s} \end{cases}$，转动惯量 $\begin{cases} I_x = \int_L y^2\mu\mathrm{d}s \\ I_x = \int_L x^2\mu\mathrm{d}s \\ I_O = \int_L (x^2+y^2)\mu\mathrm{d}s \end{cases}$.

关于空间曲线 Γ 有类似公式.

质心坐标为 $\begin{cases} \bar{x} = \dfrac{\int_L x\mu\mathrm{d}s}{\int_L x\mathrm{d}s} \\ \bar{y} = \dfrac{\int_L y\mu\mathrm{d}s}{\int_L y\mathrm{d}s} \\ \bar{z} = \dfrac{\int_L z\mu\mathrm{d}s}{\int_L z\mathrm{d}s} \end{cases}$，转动惯量 $\begin{cases} I_x = \int_{\Gamma} (y^2+z^2)\mu\mathrm{d}s \\ I_y = \int_{\Gamma} (x^2+z^2)\mu\mathrm{d}s \\ I_z = \int_{\Gamma} (x^2+y^2)\mu\mathrm{d}s \\ I_O = \int_{\Gamma} (x^2+y^2+z^2)\mu\mathrm{d}s \end{cases}$.

【例 9.6】 设螺旋形弹簧一圈的方程为 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$，其中 $0\leqslant t\leqslant 2\pi$，它的线密度 $\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$，求：

(1) 它关于 z 轴的转动惯量；

(2) 它的质心.

【解】(1)$I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}s$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=2\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}\left(a^2+\frac{4}{3}k^2\pi^2\right).$$

(2)$\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4k^2\pi^2)$,

$\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a\cos t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=4\pi ak^2\sqrt{a^2+k^2}$,

$\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}a\sin t(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=-4\pi^2ak^2\sqrt{a^2+k^2}$,

$\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}kt(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}\,\mathrm{d}t=2\pi^2k\sqrt{a^2+k^2}(a^2+2\pi^2k^2)$,

所以

$$\bar{x}=\frac{\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}=\frac{6ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2},$$

$$\bar{y}=\frac{\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}=-\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2},$$

$$\bar{z}=\frac{\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_\Gamma\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}=\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4k^2\pi^2}.$$

故质心为$\left(\frac{6ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2},-\frac{6\pi ak^2}{3a^2+4k^2\pi^2},\frac{3\pi k(a^2+2\pi^2k^2)}{3a^2+4k^2\pi^2}\right)$.

二、对坐标的曲线积分

1. 定义

设L为xOy平面内从点A到点B的一条有向光滑曲线弧，函数$P(x,y)$、$Q(x,y)$在L上有界.

用$n-1$个点将L分为n个小弧段，设λ为各小弧段长度的最大值，如果极限

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i$$

存在，则称此极限为函数$P(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标x的曲线积分，记为$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$，即

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta x_i.$$

同理，如果极限

$$\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i$$

存在，则称此极限为函数$Q(x,y)$在有向曲线弧L上对坐标y的曲线积分，记为$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$，即

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i)\cdot\Delta y_i.$$

注 ① 如果函数 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在 L 上连续，则对坐标的曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x$ 与 $\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y$ 一定存在.

② 上述定义可以类似推广到积分曲线弧为空间有向曲线弧 Γ 的情形：

$$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta x_i,$$

$$\int_L Q(x,y,z)\mathrm{d}y = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta y_i,$$

$$\int_L R(x,y,z)\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\Delta z_i.$$

③ 应用时，经常出现的是

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + \int_L Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

为简便起见，将上式写成

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

④ 上式也可写成向量的形式

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},\text{其中 } \boldsymbol{F}(x,y) = P(x,y)\boldsymbol{i} + Q(x,y)\boldsymbol{j},\boldsymbol{r} = \mathrm{d}x\boldsymbol{i} + \mathrm{d}y\boldsymbol{j}.$$

2. 物理意义

表示质点在力 $\boldsymbol{F} = \{P,Q\}$ 或 $\boldsymbol{F} = \{P,Q,R\}$ 作用下沿曲线 L 从 A 点移动到 B 点，外力所做的功 W，即

$$W = \int_{L(AB)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

或
$$W = \int_{L(AB)} P(x,y,z)\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\mathrm{d}y + R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

3. 对弧长曲线积分的性质

性质 1 （线性性质） 设 α,β 为常数，则

$$\int_L [\alpha P_1(x,y) + \beta P_2(x,y)]\mathrm{d}x = \alpha\int_L P_1(x,y)\mathrm{d}x + \beta\int_L P_2(x,y)\mathrm{d}x,$$

$$\int_L [\alpha Q_1(x,y) + \beta Q_2(x,y)]\mathrm{d}y = \alpha\int_L Q_1(x,y)\mathrm{d}y + \beta\int_L Q_2(x,y)\mathrm{d}y.$$

性质 2 （对路径具有可加性） 如果有向曲线 L 分段光滑，即 $L = L_1 + L_2$，L_1，L_2 光滑，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x = \int_{L_1} P(x,y)\mathrm{d}x + \int_{L_2} P(x,y)\mathrm{d}x,$$

$$\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{L_1} Q(x,y)\mathrm{d}y + \int_{L_2} Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

性质 3 （与路径方向有关） 设 L^- 表示与 L 有相反方向的有向曲线，则

$$\int_{L^-} P(x,y)\mathrm{d}x = -\int_L P(x,y)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{L^-} Q(x,y)\mathrm{d}y = -\int_L Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

4. 对坐标的曲线积分的计算的方法

定理 设 $P(x,y)$、$Q(x,y)$ 在有向曲线弧 L 上有定义且连续，L 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}.$$

当参数 t 单调地由 α 变到 β 时，点 $M(x,y)$ 由 L 的起点 A 沿 L 运动到终点 B，$\varphi(t)$、$\psi(t)$ 在以 α,β 为端点的闭区间上具有一阶连续导数，且 $[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2\neq 0$，则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 存在，

且 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t.$

注 ① 积分下限 α 对应曲线 L 的起点，积分上限 β 对应曲线 L 的终点.

② 如果曲线 $L: y=\psi(x)$，$x=a$ 对应起点，$x=b$ 对应终点，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_a^b\{P[x,\psi(x)]+Q[x,\psi(x)]\psi'(x)\}\mathrm{d}x.$$

③ 如果曲线 $L: x=\varphi(y)$，$y=c$ 对应起点，$y=d$ 对应终点，则

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d\{P[\varphi(y),y]\varphi'(y)+Q[\varphi(y),y]\}\mathrm{d}y.$$

④ 计算公式也可推广到空间曲线 Γ 由参数方程给出的情形，若空间曲线弧 Γ 由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t)\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta) \\ z=\omega(t) \end{cases}$$

给出，则

$$\int_\Gamma P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_\alpha^\beta\{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)+R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}\mathrm{d}t.$$

⑤ 曲线积分可将积分曲线的方程直接代入被积函数中去.

【例 9.7】求下列积分.

(1) $I=\int_L(xy-1)\mathrm{d}x+\dfrac{2x^2y}{\sqrt{4x+y^2}}\mathrm{d}y$，其中 L 是曲线 $4x+y^2=4$ 上从 $A(1,0)$ 到 $B(0,2)$ 的一段弧；

(2) $I=\int_L 2xy\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z$，其中 L 是 $A(1,0,2)$ 到 $B(2,4,1)$ 的直线段.

【解】(1) 将 $4x+y^2=4$ 代入被积式中，得

$$I=\int_L(xy-1)\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y.$$

$L: x=1-\dfrac{y^2}{4}$，y 的起点为 0；终点为 2.

故 $I=\int_0^2\left\{\left[\left(1-\dfrac{y^2}{4}\right)y-1\right]\cdot\left(-\dfrac{y}{2}\right)+\left(1-\dfrac{y^2}{4}\right)^2y\right\}\mathrm{d}y$

$=\int_0^2\left(\dfrac{y^5}{16}+\dfrac{y^4}{8}-\dfrac{y^3}{2}-\dfrac{y^2}{2}+\dfrac{3y}{2}\right)\mathrm{d}y=\dfrac{17}{15}.$

(2) 直线 L 的方向矢量 $\boldsymbol{s}=\{1,4,-1\}$，则直线 L 的参数式方程为

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=4t \quad ,t:0\to 1. \\ z=2-t \end{cases}$$

故 $I=\int_0^1\{2(1+t)\cdot 4t\cdot 1+[(1+t)^2+(4t)^2]\cdot 4+(1+t+4t+2-t)\cdot(-1)\}\mathrm{d}t$

$=\int_0^1(76t^2+12t+1)\mathrm{d}t=\frac{7}{3}.$

5. 对坐标的曲线积分的应用

【例 9.8】质点 P 沿着以 AB 为直径的半圆周，从点 $A(1,2)$ 运动到 $B(3,4)$ 的过程中受力 $\boldsymbol{F}$ 作用，$\boldsymbol{F}$ 的大小等于点 P 与原点 O 之间的距离，其方向垂直于线段 OP，且与 y 轴正向的夹角小于 $\frac{\pi}{2}$，求变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功.

【解】如图 9-2.

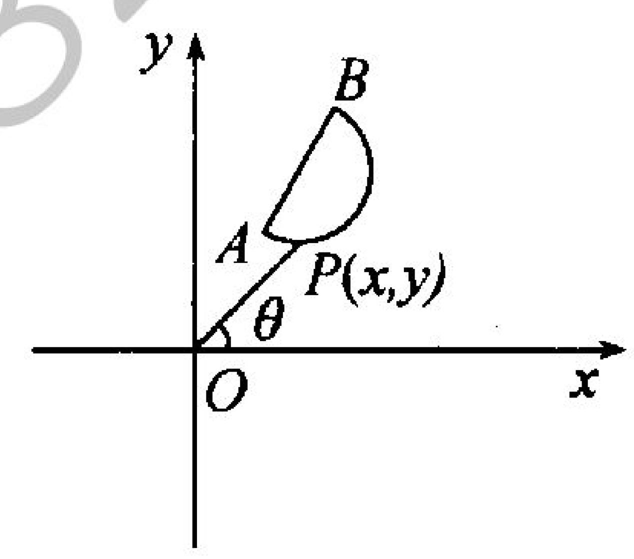

图 9-2

设 P 点坐标为 (x,y)，由题意可知

$$\boldsymbol{F}=|\boldsymbol{F}|\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\boldsymbol{i}+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\boldsymbol{j}\right]$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}[-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}]$$

$$=\sqrt{x^2+y^2}\left[-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}\right]=-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}.$$

圆弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的参数方程是

$$\begin{cases}x=2+\sqrt{2}\cos\theta\\ y=3+\sqrt{2}\sin\theta\end{cases},-\frac{3}{4}\pi\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{4}\pi.$$

故变力 $\boldsymbol{F}$ 对质点 P 所做的功为

$$W=\int_{\overset{\frown}{AB}}-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}[\sqrt{2}(3+\sqrt{2}\sin\theta)\sin\theta+\sqrt{2}(2+\sqrt{2}\cos\theta)\cos\theta]\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{\frac{\pi}{4}}(3\sqrt{2}\sin\theta+2\sqrt{2}\cos\theta+2)\mathrm{d}\theta$$

$$=-6+4+2\pi=2\pi-2.$$

三、两种曲线积分的关系

1. 平面曲线积分

$$\int_{L(AB)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta)\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 表示曲线 L 上一点 $M(x,y)$ 处的沿曲线 L 方向的切线的方向余弦.

2. 空间曲线积分

与平面曲线积分类似，有

$$\int_{L(AB)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 表示曲线 L 上一点 $M(x,y,z)$ 处的沿曲线 L 方向的切线的方向余弦.

四、格林公式及其应用

1. 单连通区域

设 D 为平面区域，如果 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D，则称 D 为单连通区域，否则称为复连通区域.

注 ① 单连通区域不包括区域 D 的边界上的任何点.

② 单连通区域 D 内没有任何洞和不属于 D 的点. 区域 D 中的一条闭曲线，收缩为一点后仍属于 D.

如，平面上的圆形区域 $\{(x,y) \mid x^2+y^2<1\}$ 是单连通区域；

圆环形区域 $\{(x,y) \mid 1<x^2+y^2<4\}$ 是复连通区域.

2. 格林公式

定理 设 $P(x,y)$，$Q(x,y)$ 在有界闭域 D 上具有一阶连续的偏导数，则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

其中 L 为闭域 D 的边界线，其方向取正方向. (1) 式称为格林公式.

正向定义：人沿着边界行走，曲域 D 始终在人的左边，人走的方向即为正向.

注 ① 格林公式的一个应用：利用曲线积分计算平面区域的面积.

在公式(1)中取 $P=-y$，$Q=x$，即得 $\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.

设 A 为区域 D 的面积，则 $A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x$.

② 应用格林公式时，若 L 非闭，则添加线 L^*，使得 $L+L^*$ 为闭，则有

$$I=\oint_{L+L^*}-\int_{L^*}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{L^*}.$$

【例 9.9】 求椭圆 $x=a\cos\theta$，$y=b\sin\theta$ 所围成的图形的面积 A.

【解】 根据公式有

$$A=\frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}ab\,\mathrm{d}\theta=\pi ab.$$

【例 9.10】 计算 $I=\int_L\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+2\left[2x+y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]\mathrm{d}y$，

其中 L：

(1) 沿椭圆弧 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$，方向为逆时针.

(2) 沿上半椭圆弧 $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$，从 $A(b,0)$ 到 $B(-b,0)$ $(b,c>0)$.

【解】 $P=\frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$，$Q=2\left[2x+y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]$，于是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=4+\frac{2y}{\sqrt{a^2+x^2}}.$$

(1) 画出路径草图 9-3.

$$I=\int_L \frac{y^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\mathrm{d}x+2\left[2x+y\ln\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right)\right]\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\pi bc.$$

(2) 画出路径草图 9-4.

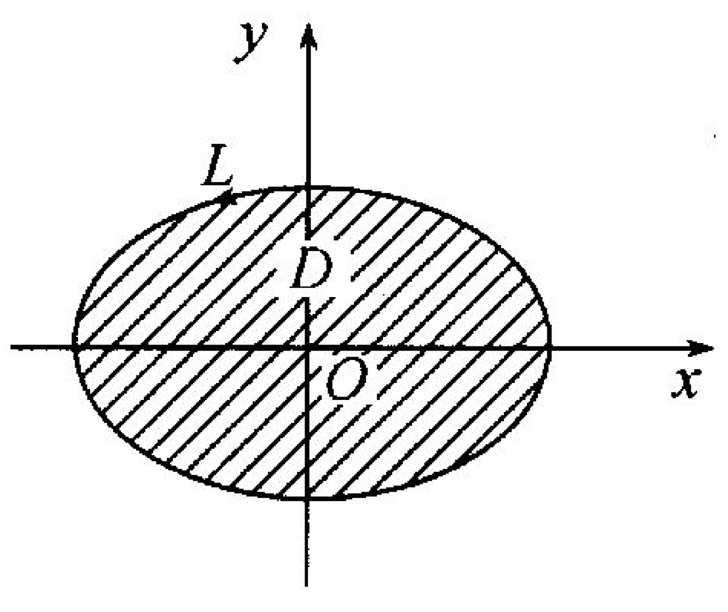

图 9-3

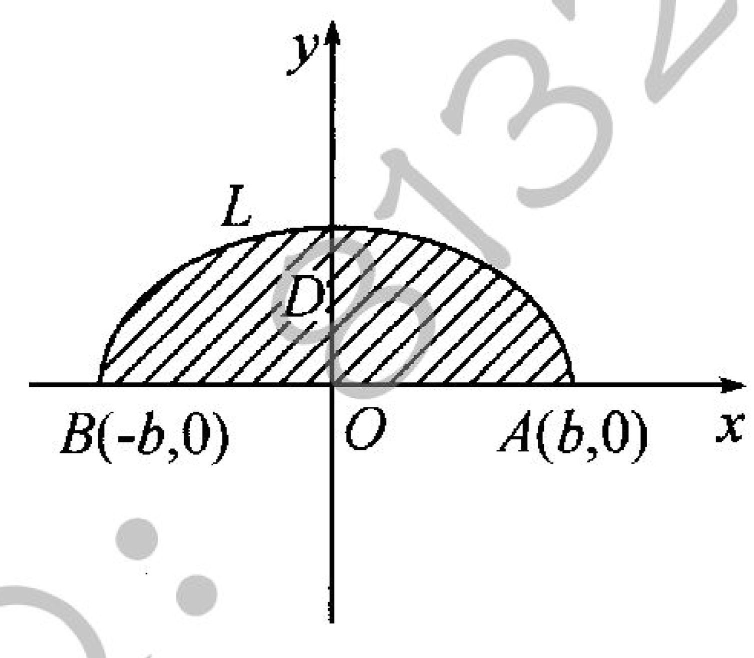

图 9-4

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\overline{BA}}$$

$$=\iint_D 4\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\cdot\frac{1}{2}\pi bc=2\pi bc.$$

【例 9.11】 计算 $\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$，其中 L 为一条无重点、分段光滑且不经过原点的连续闭曲线，L 的方向为逆时针方向.

【解】 令 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$，则当 $x^2+y^2\neq 0$ 时，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}.$$

故当闭曲线 L 内不含原点时

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

如果闭曲线 L 内含原点，则作小圆 $L^*: x^2+y^2=\varepsilon^2$（$\varepsilon$ 为一较小正数）含在 L 内，如图 9-5 所示，设 L^* 的方向是逆时针，则有

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}-\oint_{L^*} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

这里，D_1 为介于 L 与 L^* 之间的区域. 因此得

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\oint_{L^*} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}.$$

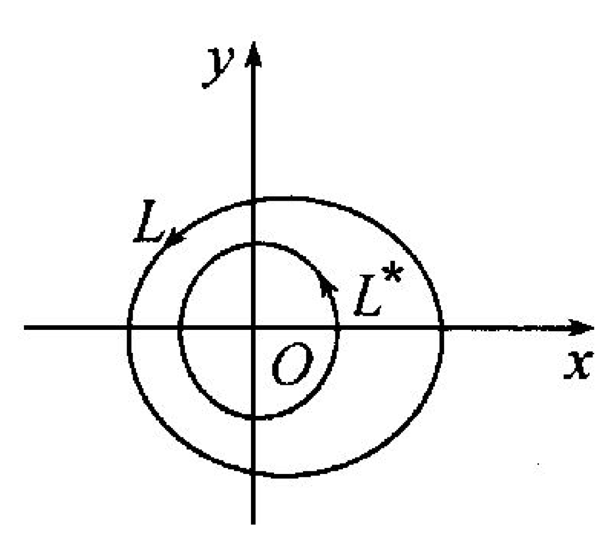

图 9-5

而 $\oint_{L^*} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2\cos^2\theta+\varepsilon^2\sin^2\theta}{\varepsilon^2}\mathrm{d}\theta=2\pi.$

故

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 2\pi.$$

2. 曲线与路径无关的条件

定理 1 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭域 D 上连续，曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是

$$\oint_{L^*} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0,$$

其中 L^* 为闭域 D 中任一光滑简单闭曲线.

定理 2 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在单连通域 D 上具有一阶连续的偏导数，则曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关的充分必要条件是 $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$.

【例 9.12】 设函数 $Q(x,y)$ 在 xOy 平面上具有一阶连续的偏导数，曲线积分 $\int_L 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且对任意 t，恒有

$$\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

求 $Q(x,y)$.

【解】 由曲线积分与路径无关，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(2xy) = 2x,$$

于是 $Q(x,y) = x^2 + C(y)$，$C(y)$ 为待定函数.

则 $\int_{(0,0)}^{(t,1)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 Q(t,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 [t^2 + C(y)]\mathrm{d}y$,

$\int_{(0,0)}^{(1,t)} 2xy\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^t Q(1,y)\mathrm{d}y = \int_0^t [1 + C(y)]\mathrm{d}y$.

于是有 $\int_0^1 [t^2 + C(y)]\mathrm{d}y = \int_0^t [1 + C(y)]\mathrm{d}y$，两边对 t 求导得

$$2t = 1 + C(t)，于是\ C(t) = 2t - 1.$$

故
$$Q(x,y) = x^2 + 2y - 1.$$

【例 9.13】 求 $I = \int_L (2xe^y - 3x^2)\mathrm{d}x + (x^2e^y + 2y - 1)\mathrm{d}y$，

其中 L 为通过点 $A(1,3)$，$B(3,-1)$，$C(4,-2)$ 的圆弧，起点为 A，终点为 C.

【解】 $P = 2xe^y - 3x^2$，$Q = x^2e^y + 2y - 1$，于是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xe^y, \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xe^y \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

则积分与路径无关. 因此不必求出圆的方程，选如下路径.

如图 9-6，$I = \int_{\overline{AD}} + \int_{\overline{DC}}$

$= \int_1^4 (2xe^3 - 3x^2)\mathrm{d}x + \int_3^{-2} (16e^y + 2y - 1)\mathrm{d}y$

$= (x^2e^3 - x^3)\Big|_1^4 + (16e^y + y^2 - y)\Big|_3^{-2} = 16e^{-2} - e^3 - 63.$

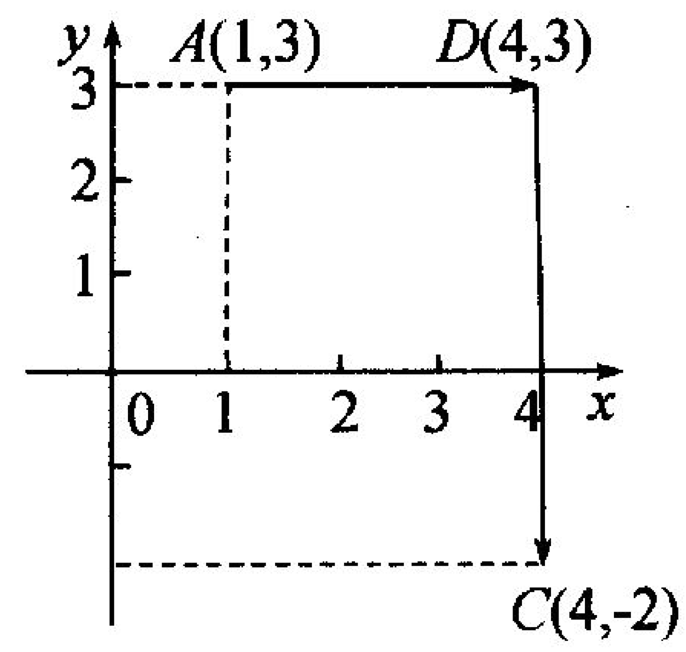

图 9-6

定理 3 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在单连通空间域 Ω 上具有一

阶连续的偏导数，则曲线积分$\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$与路径无关的充分必要条件是$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x},\frac{\partial R}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial z},\frac{\partial P}{\partial z}\equiv\frac{\partial R}{\partial x}$.

定理 4 设 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭域 D 上具有一阶连续的偏导数，且恒有$\frac{\partial P}{\partial y}\equiv\frac{\partial Q}{\partial x}$，$L_1,L_2$为 D 中任意两条同向的闭曲线，且它们各自所围成的域中含有相同的不属于 D 的点，则$\oint_{L_1}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\oint_{L_2}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$.

定理 5 **(二元函数的全微分求积)**

设区域G是一个单连通区域，函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在G内具有一阶连续偏导数，则表达式 $P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在G 内为某函数 $u(x,y)$ 的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立，且

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

注 因为积分与路径无关，所以可选择积分路径为：$(x_0,y_0)\to(x,y_0)\to(x,y)$，于是

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y.$$

【例 9.14】验证：在 xOy 平面内，$xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y$ 是某函数 $u(x,y)$ 的全微分，并求 $u(x,y)$.

【解】由于 $P(x,y)=xy^2,Q(x,y)=x^2y$，所以在 xOy 平面内有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2xy.$$

选$(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_{(0,0)}^{(x,y)}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y\\&=\int_0^x x\cdot 0^2\mathrm{d}x+\int_0^y x^2y\mathrm{d}y=\frac{x^2y^2}{2}.\end{aligned}$$

9.2 曲面积分

曲面积分按积分域是无向曲面片还是有向曲面片而划分为第一类曲面积分(即对面积的曲面积分)和第二类曲面积分(即对坐标的曲面积分).

一、对面积的曲面积分

1. 定义

设函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 片上有界，如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

存在，则极限值称为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分，记为 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

注 ① 如果函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 片上连续，则 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 片上对面积的曲面积分一定存在.

② 如果在曲面 Σ 上，$f(x,y,z)\equiv 1$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S = S,$$

S 为曲面片 $\sum$ 的面积.

2. 物理意义

表示面密度为 $\mu = f(x,y,z)$ 的曲面 Σ 的质量 M，即 $M = \iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$.

3. 对面积的曲面积分的性质

(1) 与曲面 Σ 的侧无关，即 $\iint\limits_{\Sigma} = \iint\limits_{\bar{\Sigma}}$，$\bar{\Sigma}$ 为 $\sum$ 的反侧；

(2) 如果曲面 Σ 由两块曲面片 Σ_1,Σ_2 组成，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S + \iint\limits_{\Sigma_2} f(x,y,z)\mathrm{d}S.$$

4. 对面积的曲面积分的计算

(1) 化为投影域上的二重积分计算.

设曲面 Σ 的方程为 $\Sigma: z = z(x,y)$，Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy}，函数 $z = z(x,y)$ 在 D_{xy} 上具有连续偏导数，

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y;$$

类似地：

如果曲面 Σ 的方程为 $\Sigma: y = y(x,z)$，Σ 在 xOz 面上的投影区域为 D_{xz}，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{xz}} f[x,y(x,z),z]\sqrt{1+y_x^2(x,z)+y_z^2(x,z)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z;$$

如果曲面 Σ 的方程为 $\Sigma: x = x(y,z)$，Σ 在 yOz 面上的投影区域为 D_{yz}，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S = \iint\limits_{D_{yz}} f[x(y,z),y,z]\sqrt{1+x_y^2(y,z)+x_z^2(y,z)}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

(2) 利用对称性及曲面 Σ 的表达式可直接代入被积式中的特点简化计算.

【例 9.15】 计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$.

【解】 $z^2 = R^2 - x^2 - y^2$，$z'_x = -\dfrac{x}{z}$，$z'_y = -\dfrac{y}{z}$，

$$dS = \sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,dxdy = \sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{z^2}}\,dxdy = \frac{R}{|z|}dxdy.$$

故 $I = \iint\limits_{\Sigma} z dS = \iint\limits_{\Sigma_上} z dS + \iint\limits_{\Sigma_下} z dS$

$$= \iint\limits_{D} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\,\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy + \iint\limits_{D}\left(-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dxdy$$

$= 0.$

注 本题还可以这样求解：

因为 S 关于坐标面 xOy 对称，而 $f(x,y,z)=z$ 关于 z 是奇函数，所以 $I=0$.

【例 9.16】 设曲面 Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，计算 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS$.

【解】 由积分域与被积函数的对称性有

$$\oiint\limits_{\Sigma} x dS = 0, \oiint\limits_{\Sigma}|x|dS = \oiint\limits_{\Sigma}|y|dS = \oiint\limits_{\Sigma}|z|dS,$$

所以

$$\oiint\limits_{\Sigma}|y|dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)dS = \frac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma}dS = \frac{1}{3}\cdot 8\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

故 $\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)dS = \frac{4}{3}\sqrt{3}$.

二、对坐标的曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$

1. 定义

(1) 有向曲面.

规定了侧的曲面称为有向曲面.

(2) 侧.

对于由 $z=z(x,y)$ 表示的曲面分上侧与下侧；对于由 $y=y(x,z)$ 表示的曲面分左侧与右侧；对于由 $x=x(y,z)$ 表示的曲面分前侧与后侧.

对于曲面 Σ：$z=z(x,y)$，取其法向量为 $\boldsymbol{n}$，如果 $\boldsymbol{n}$ 与 z 轴正向夹锐角，则说曲面 Σ 取上侧，否则说曲面 Σ 取下侧. 类似地：

对于曲面 Σ：$y=y(x,z)$，取其法向量为 $\boldsymbol{n}$，如果 $\boldsymbol{n}$ 与 y 轴正向夹锐角，则说曲面 Σ 取右侧，否则说曲面 Σ 取左侧.

对于曲面 Σ：$x=x(y,z)$，取其法向量为 $\boldsymbol{n}$，如果 $\boldsymbol{n}$ 与 x 轴正向夹锐角，则说曲面 Σ 取前侧，否则说曲面 Σ 取后侧.

(3) 投影.

设 Σ 是有向曲面，ΔS 为 Σ 上一块小曲面，ΔS 在 xOy 面上的投影区域的面积为 $(\Delta\sigma)_{xy}$，$\cos\gamma$ 为 ΔS 各点的法向量与 z 轴正向夹锐角 γ 的余弦. 有向曲面 ΔS 在 xOy 面上的投影(记为 $(\Delta S)_{xy}$)定义为

$$(\Delta S)_{xy}=\begin{cases}(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma>0\\ -(\Delta\sigma)_{xy}, & \cos\gamma<0.\\ 0, & \cos\gamma=0\end{cases}$$

类似,可定义有向曲面 ΔS 在 yOz 面上的投影 $(\Delta S)_{yz}$ 及有向曲面 ΔS 在 xOz 面上的投影 $(\Delta S)_{xz}$.

(4) 对坐标的曲面积分的定义.

设 Σ 为光滑的有向曲面,函数 $R(x,y,z)$ 在 Σ 上有界. 如果极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

存在,则极限值称为函数 $R(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x、y 的曲面积分,记为 $\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,即

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}.$$

类似,函数 $P(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 y、z 的曲面积分定义为

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}.$$

函数 $Q(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x、z 的曲面积分定义为

$$\iint\limits_{\Sigma}Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}.$$

注 如果 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$、$R(x,y,z)$ 在 $\sum$ 上连续,则对坐标的曲面积分一定存在.

2. 物理意义

表示流速 $\boldsymbol{v}=\{P,Q,R\}$ 的流体在稳定流动中从曲面 Σ 的一侧流出的流量 ϕ,即

$$\phi=\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

3. 对坐标的曲面积分的性质

(1) 与曲面的侧有关,即 $\iint\limits_{\Sigma^-}=-\iint\limits_{\Sigma}$,$\Sigma^-$ 为 Σ 的反侧;

(2) 对曲面具有可加性,如果 Σ 分片光滑,即 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2$,Σ_1,Σ_2 光滑则

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{\Sigma_2}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

对坐标 y,z 及坐标 z,x 的曲面积分也有同样的性质.

4. 对坐标的曲面积分的计算

定理 设有向曲面 Σ 的方程为 $\Sigma: z=z(x,y)$,Σ 在 xOy 面上的投影区域为 D_{xy},$R(x,y,z)$ 在 Σ 上连续,则

$$\iint\limits_{\Sigma}R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中，当 Σ 是上侧时，取 + 号；当 Σ 是下侧时，取 − 号.

类似地，对于$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，$\Sigma: x = x(y,z)$，分前、后侧，Σ 在 yOz 面上投影区域为 D_{yz}，则

$$\iint\limits_{\Sigma} P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \pm \iint\limits_{D_{yz}} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中，前侧取 + 号，后侧取 − 号.

对于$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，$\Sigma: y = y(x,z)$，分左、右侧，Σ 在 xOz 面上投影区域为 D_{xz}，则

$$\iint\limits_{\Sigma} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \pm \iint\limits_{D_{xz}} Q[x,y(x,z),z]\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

其中，右侧取 + 号，左侧取 − 号.

【例 9.17】计算曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 是长方体 $\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c\}$ 的表面的外侧.

【解】将曲面 Σ 分成 6 个曲面片.

$\Sigma_1: z = c(0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b)$ 的上侧，

$\Sigma_2: z = 0(0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant y \leqslant b)$ 的下侧，

$\Sigma_3: x = a(0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c)$ 的前侧，

$\Sigma_4: x = 0(0 \leqslant y \leqslant b, 0 \leqslant z \leqslant c)$ 的后侧，

$\Sigma_5: y = b(0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant c)$ 的右侧，

$\Sigma_6: y = 0(0 \leqslant x \leqslant a, 0 \leqslant z \leqslant c)$ 的左侧.

除 Σ_3、Σ_4 外，其余四个曲面在 yOz 面上的投影为零，因此

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{\Sigma_3} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{\Sigma_4} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{D_{yz}} a^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_{yz}} 0\mathrm{d}y\mathrm{d}z = a^2bc.$$

同理，

$$\iint\limits_{\Sigma} y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x = ab^2c, \iint\limits_{\Sigma} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = abc^2.$$

故

$$\iint\limits_{\Sigma} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (a+b+c)abc.$$

【例 9.18】计算 $I = \iint\limits_{\Sigma} \dfrac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2 = R^2$ 与两平面 $z = R, z = -R(R>0)$所围形体的外侧.

【解】如图 9-7，$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3$，于是 $I = \iint\limits_{\Sigma_1} + \iint\limits_{\Sigma_2} + \iint\limits_{\Sigma_3}$.

$$\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_1}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}=\iint\limits_{D:x^2+y^2=R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2}=-\iint\limits_{D:x^2+y^2=R^2}\frac{R^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+R^2},$$

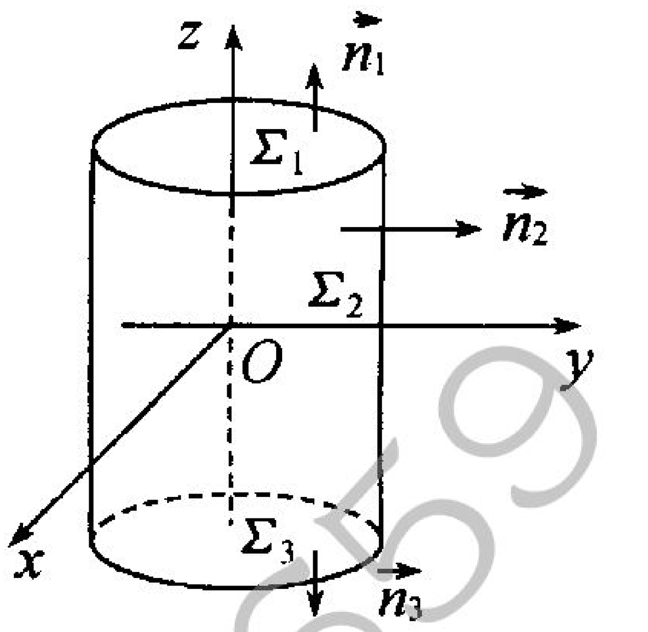

图 9-7

所以$\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_3}=0.$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}\text{(因为在 }\Sigma_2\text{ 上,}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0\text{)}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_2\text{前}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2\text{后}}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma_2\text{前}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}+\iint\limits_{\Sigma_2\text{后}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=\iint\limits_{D^*:\begin{cases}-R\leqslant y\leqslant R\\-R\leqslant z\leqslant R\end{cases}}\frac{\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}-\iint\limits_{D^*:\begin{cases}-R\leqslant y\leqslant R\\-R\leqslant z\leqslant R\end{cases}}\frac{-\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-y^2}\,\mathrm{d}y\int_{-R}^{R}\frac{\mathrm{d}z}{R^2+z^2}$$

$$=8\int_0^R\sqrt{R^2-y^2}\cdot\frac{\arctan\frac{z}{R}}{R}\Bigg|_0^R\mathrm{d}y$$

$$=8\times\frac{\pi R^2}{4}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{R}=\frac{\pi^2 R}{2}.$$

三、两种曲面积分的关系

$$\iint\limits_{\Sigma}P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q(x,y,z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\left(P(x,y,z)\frac{\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}S}+Q(x,y,z)\frac{\mathrm{d}z\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S}+R(x,y,z)\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\mathrm{d}S}\right)\mathrm{d}S$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}(P(x,y,z)\cos\alpha+Q(x,y,z)\cos\beta+R(x,y,z)\cos\gamma)\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 表示曲面 Σ 上一点 $M(x,y,z)$ 处法线方向的方向余弦.

注 牢记 $\cos\alpha\mathrm{d}S=\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\cos\beta\mathrm{d}S=\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\cos\gamma\mathrm{d}S=\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

【例 9.19】 设 Σ 是曲面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧,$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 是其外法线向量的方向余弦,

则 $$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}S=\_\_\_\_\_\_.$$

【解】 由两类曲面积分的关系,得

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{a^3}\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{a^3}\iiint_{\Omega} 3\mathrm{d}V = \frac{3}{a^3} \cdot \frac{4}{3}\pi a^3 = 4\pi.$$

四、高斯定理及其应用

定理 1 **(高斯定理)** 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在闭曲面 Σ 所围成的空间域 Ω 中具有一阶连续的偏导，则

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 Σ 取外侧.

注 ①Σ 为闭，$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 满足条件，则

$$\oiint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$$

②Σ 为非闭，$\Sigma + \Sigma^*$ 为闭

$$I = \oiint_{\Sigma+\Sigma^*} - \oiint_{\Sigma^*} = \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \oiint_{\Sigma^*}.$$

【例 9.20】 计算 $I = \iint_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$：锥面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z = \sqrt{2-(x^2+y^2)}$ 所围形体，取外侧.

【解】 画草图如图 9-8 所示.

于是 $I = \iint_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z - zy\mathrm{d}z\mathrm{d}x - z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_{\Omega}(4z - z - 2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

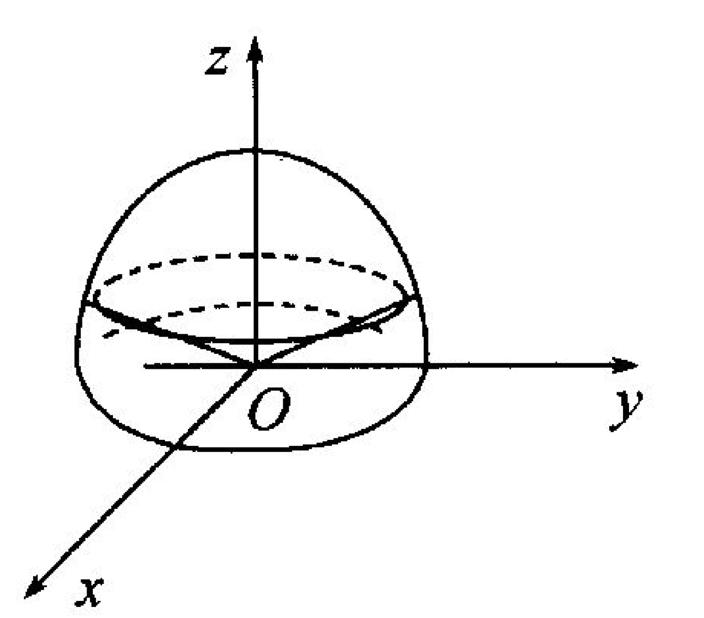

图 9-8

利用球面坐标系，得

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\cos\varphi \cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{2}} r^3\mathrm{d}r = \pi.$$

【例 9.21】 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + 3xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 Σ 为曲面 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$ 的上侧.

【解】 Σ 的方程为 $z = 1 - x^2 - \frac{y^2}{4}(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

添加一个平面 $\Sigma_1:\begin{cases} z = 0 \\ x^2 + \frac{y^2}{4} \leqslant 1 \end{cases}$，则 Σ 与 Σ_1 构成闭曲面 Σ_*，其所围区域记为 Ω. 于是

$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_1}.$$

而

$$\oiint\limits_{\Sigma_*} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial(xz)}{\partial x}+\frac{\partial(2yz)}{\partial y}+\frac{\partial(3xy)}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=3\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3\int_0^1 z\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1-z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=6\pi\int_0^1 z(1-z)\mathrm{d}z=\pi,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1} xz\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2yz\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{\Sigma_1}3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}3xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(上式可直接由被积函数的奇偶性和积分区域的对称性得出)

所以
$$I=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\oiint\limits_{\Sigma_*}-\iint\limits_{\Sigma_1}=\pi.$$

定理 2 **(斯托克斯公式)** 设 $P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$ 在曲面 Σ 所张成的空间域 Ω 中有一阶连续的偏导,L 为曲面 Σ 的边界线,则

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$ 为曲面 Σ 上一点 (x,y,z) 处的法线的方向余弦. L 的正向与曲面 Σ 的侧满足右手系. 注意:为简单起见,选以 L 为边界线的平面作曲面 Σ.

【例 9.22】 计算 $I=\int_L(x^2-yz)\mathrm{d}x+(y^2-xz)\mathrm{d}y+(z^2-xy)\mathrm{d}z$,其中 L 沿曲线 $\begin{cases}x=a\cos t\\ y=a\sin t\\ z=\dfrac{h}{2\pi}t\end{cases}$ 从 $A(a,0,0)$ 到 $B(a,0,h)$ $(a,h>0)$.

【解】 如图 9-9.

$$I=\oint_{L+\overline{BA}}-\int_{\overline{BA}}.$$

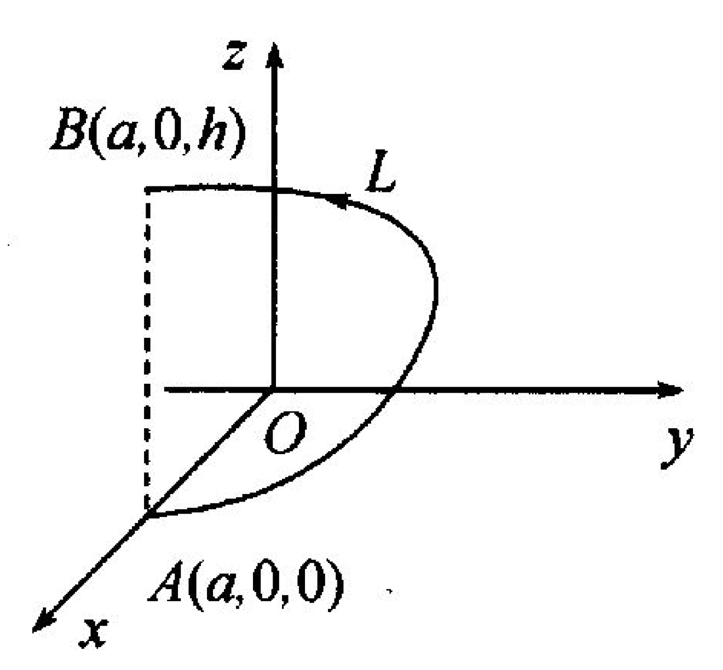

图 9-9

$$\oint_{L+\overline{BA}}=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ x^2-yz & y^2-xz & z^2-xy\end{vmatrix}=0.$$

$\overline{BA}:\begin{cases}x=a\\ y=0\\ 0\leqslant z\leqslant h\end{cases}$,于是 $\int_{\overline{BA}}=\int_h^0 z^2\mathrm{d}z=-\dfrac{1}{3}h^3.$

故 $I=0-\left(-\frac{1}{3}h^3\right)=\frac{1}{3}h^3$.

9.3 场论初步

一、方向导数

设三元函数 $U=f(x,y,z)$ 在 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点可微，过 $P(x_0,y_0,z_0)$ 点的有向线段 l 的方向余弦为 $\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$，则 u 在 P 点沿 l 的方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_P.$$

【例 9.23】 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $M(1,1,1)$ 处沿曲面 $2z=x^2+y^2$ 在点 M 处的外法线方向 l 的方向导数 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=$ ________.

【解】 $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}$，曲面在点 M 处的外法线方向 l 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\beta=\left.\frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\cos\gamma=-\left.\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\right|_M=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

所以 $\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}$.

二、梯度

设数量场 $u=f(x,y,z)$ 具有连续的偏导数，则 u 在 $P(x,y,z)$ 点的梯度为

$$\mathrm{grad}u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

注 梯度的大小为该点处方向导数的最大值.

【例 9.24】 设数量场 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，求 $\mathrm{grad}u$.

【解】 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2+z^2)$，

则 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+z^2},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{x^2+y^2+z^2}$，

故 $$\begin{aligned}\mathrm{grad}u&=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\\&=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{i}+\frac{y}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{j}+\frac{z}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

三、散度

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 均可导，则 $\boldsymbol{A}$ 在 $M(x,y,z)$ 点处的散度为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

【例 9.25】 求向量场 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$ 在点 $P(0,1,1)$ 处的散度.

【解】 设 $\boldsymbol{u}(x,y,z)=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则

$$\mathrm{div}\boldsymbol{u}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=y^2+e^z+\frac{2xz}{1+z^2},$$

故 $\mathrm{div}\boldsymbol{u}\big|_{P(0,1,1)}=1+e.$

四、旋度

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，其中 P,Q,R 均有连续的一阶偏导数，则旋度为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

【例 9.26】 设向量场 $\boldsymbol{A}=xy^2\boldsymbol{i}+ye^z\boldsymbol{j}+x\ln(1+z^2)\boldsymbol{k}$，则 $\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=$ ________.

【解】
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy^2 & ye^z & x\ln(1+z^2)\end{vmatrix}$$
$$=-ye^z\boldsymbol{i}-\ln(1+z^2)\boldsymbol{j}-2xy\boldsymbol{k}.$$

五、通量

设有一向量场 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则沿场中有向曲面 Σ 某一侧的曲面积分

$$\Phi=\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

为 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 Σ 这一侧的通量.

【例 9.27】 流体在空间流动，流体的密度 μ 处处相同(设 $\mu=1$). 已知流速函数为 $v=xz^2\boldsymbol{i}+yx^2\boldsymbol{j}+zy^2\boldsymbol{k}$，求流体在单位时间内流过曲面 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=2z$ 的流量.

【解】 设 $P=xz^2, Q=yx^2, R=zy^2$，$\Sigma: x^2+y^2+(z-1)^2=1$ 为球面，则所求流量为

$$\Phi=\oiint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega}(z^2+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\varphi}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{32}{5}\sin\varphi\cos^5\varphi\mathrm{d}\varphi=\frac{32}{15}\pi.$$

习 题 九

一、选择题

1. 设曲线积分 $\int_L(x^4+4xy^p)\mathrm{d}x+(6x^{p-1}y^2-5y^4)\mathrm{d}y$ 与路径无关，则 $p=$

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4. 【 】

2. 设 $S:(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=1$，则 $\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}S=$

A. $4\pi(a+b+c)$. B. $\frac{4\pi}{3}(a+b+c)$.

C. 4π. D. 0. 【 】

3. 设 $L_1:x^2+4y^2=1,y\geqslant0,L_2:x^2+4y^2=1,x\geqslant0,y\geqslant0$，则

A. $\int_{L_1}(x+y)\mathrm{d}s=2\int_{L_2}(x+y)\mathrm{d}s$. B. $\int_{L_1}xy\mathrm{d}s=2\int_{L_2}xy\mathrm{d}s$.

C. $\int_{L_1}x^2\mathrm{d}s=2\int_{L_2}y^2\mathrm{d}s$. D. $\int_{L_1}(x+y)^2\mathrm{d}s=2\int_{L_2}(x^2+y^2)\mathrm{d}s$. 【 】

4. 设 $S:x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant0)$，$S_1$ 为 S 在第一卦限中的部分，则有

A. $\iint\limits_S x\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$. B. $\iint\limits_S y\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$.

C. $\iint\limits_S z\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}x\mathrm{d}S$. D. $\iint\limits_S xyz\mathrm{d}S=4\iint\limits_{S_1}xyz\mathrm{d}S$. 【 】

5. 设曲线 $L:f(x,y)=1$（$f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数），过第 Ⅱ 象限内的点 M 和第 Ⅳ 象限内的点 N，Γ 为 L 上从点 M 到点 N 的一段弧，则下列积分小于零的是

A. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}x$. B. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}y$.

C. $\int_\Gamma f(x,y)\mathrm{d}s$. D. $\int_\Gamma f'_x(x,y)\mathrm{d}x+f'_y(x,y)\mathrm{d}y$. 【 】

6. 设函数 $f(x,y)$ 有连续的偏导数，在点 $M(1,-2)$ 处的两个偏导数分别为 $\frac{\partial f(1,-2)}{\partial x}=1$，$\frac{\partial f(1,-2)}{\partial y}=-1$，则 $f(x,y)$ 在点 $M(1,-2)$ 处增加最快的方向是

A. i. B. j.

C. $i+j$. D. $i-j$. 【 】

二、填空题

1. 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长记为 a，则 $\oint_l(2xy+3x^2+4y^2)\mathrm{d}s=$ ________.

2. 设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域，$\sum$ 是 Ω 的整个边界的外侧，则 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

3. 设 L 为正向圆周 $x^2+y^2=2$ 在第一象限中的部分，则曲线积分 $\int_L x\mathrm{d}y-2y\mathrm{d}x$ 的值为 ________.

4. 设 $\sum$ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0\leqslant z\leqslant 1)$ 的下侧，则

$\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

5. 设 L 为半圆 $0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2}$ 的边界，则 $\int_L \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=$ ________.

6. 函数 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 在点 $M(1,2,-2)$ 处的梯度为 ________.

7. 设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}u)=$ ________.

三、计算题

1. 计算曲线积分 $\oint_c (z-y)\mathrm{d}x+(x-z)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z$，其中 c 是曲线

$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\x-y+z=2\end{cases},$$

从 z 轴正向往 z 轴负向看 c 的方向是顺时针的.

2. 计算 $I=\oint_L (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\mathrm{d}z$，其中 L 是平面 $x+y+z=2$ 与柱面 $|x|+|y|=1$ 的交线，从 z 轴正向看去，L 为逆时针方向.

3. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有一阶连续导数，L 是上半平面 $(y>0)$ 内的有向分段光滑曲线，其起点为 (a,b)，终点为 (c,d).

记 $I=\int_L \frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\mathrm{d}x+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\mathrm{d}y$，

(1) 证明曲线积分 I 与路径 L 无关；

(2) 当 $ab=cd$ 时，求 I 的值.

4. 计算曲面积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma} 2x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3(z^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\sum$ 是曲面 $z=1-x^2-y^2(z\geqslant 0)$ 的上侧.

5. 计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\sum$ 是由平面曲线 $\begin{cases}z=\mathrm{e}^y\\x=0\end{cases},0\leqslant y\leqslant a$ 绕 z 轴旋转一周所得旋转面的下侧.

四、证明题

1. 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\pi,0\leqslant y\leqslant\pi\}$，$L$ 为 D 的边界，试证：

(i) $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx = \oint_L x e^{-\sin y} dy - y e^{\sin x} dx$；

(ii) $\oint_L x e^{\sin y} dy - y e^{-\sin x} dx \geqslant 2\pi^2$.

2. 设在上半平面 $D = \{(x, y) \mid y > 0\}$ 内，函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数，且对任意的 $t > 0$ 都有 $f(tx, ty) = t^{-2} f(x, y)$. 证明：对 D 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L，都有

$$\oint_L y f(x, y) dx - x f(x, y) dy = 0.$$

参 考 答 案

一、1. C 2. A 3. D 4. C 5. B 6. D

二、1. $12a$. 2. $2\pi\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)R^3$. 3. $\frac{3}{2}\pi$. 4. 2π. 5. $e\pi + 2(e-1)$.

6. $\frac{2}{9}(1, 2, -2)$. 7. $\frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$.

三、1. -2π，利用斯托克斯公式计算.

2. -24.

3. (1) 利用曲线积分与路径无关的充要条件；(2) $I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$.

4. $I = -\pi$，利用高斯公式.

5. $I = \pi a^2 (e^{2a} - 1) - \pi a e^{2a} + \frac{\pi}{2} e^{2a} - \frac{\pi}{2}$.

四、1. 提示：利用格林公式.

2. 提示：利用曲线积分与路径无关的条件 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$.